considérations nœudiennes sur la somme arithmétique de gauss $g_n = \Sigma n$

1ère partie : la suite en elle-même.

A – partages de g_n.

a-1) – somme des entiers.

toute addition d'entiers représente un partage du résultat :

$$a + b + c + \dots + z = n.$$

a, b, …, z sont dits "les sommants" de l'entier n. je note un tel partage $p_n = [a, b, \dots, z]$.

par exemple : 17 + 21 +57 = 95.
ici n = 95, et les sommants sont les trois entiers '17', '21' et '57'; ils forment le partage $p_{95} = [17, 21, 57]$.

il existe naturellement de nombreux partages différents d'un même entier, car les entiers qui composent un partage particulier de n sont eux-mêmes des entiers. – je renvoie à mon texte "partitions des entiers" pour les définitions, les calculs et plus de précisions.

par exemple : 95 = 90 + 5 = 20 + 75 = 42 + 53 = …etc. mais aussi, trivialement, 95 = 95. chaque entier est son propre sommant et forme le seul partage à un seul élément, lui-même.

pour simplifier la lecture ultérieure disons de suite qu'il y a, pour un nombre entier quelconque 2^{n-1} partages :

ainsi 1 comporte $2^{1-1} = 2^0 = 1$ partage (1 est égal à lui-même, il est son propre et unique sommant), $p_1 = [1]$;
2 comporte $2^{2-1} = 2^1 = 2$ partages : 2 et 1 + 1; $p_2 = [1+1, 2]$;
3 comporte $2^{3-1} = 2^2 = 4$ partages : $p_3 = [1+1+1, 1+2, 2+1, 3]$. dans ce cas, et pour les entiers qui suivent, on remarquera que les partages comportant les mêmes sommants – mais dans un ordre différent! – sont considérés comme distincts[1].

[1] ce sont des permutations. il y a x! (factorielle x) permutations pour un ensemble de x éléments différents.

a-2) – présentation de la suite arithmétique de gauss g_n.

la somme de gauss, que je dénote par g_n, est le partage particulier du nombre n dont tous les sommants forment la suite naturelle des entiers consécutifs, de 1 à n :

$$g_n = \sum n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n.$$

gauss a calculé sa valeur pour n quelconque : $g_n = n(n + 1)/2$.

par exemple pour n = 6, $g_6 = 6(6+1)/2 = 6.7/2 = 42/2 = 21$:
pour n = 19, $g_{19} = 19(19+1)/2 = 19.20/2 = 380/2 = 190$. etc.

a-3 – composition des partages.

formons la table d'addition des 4 premiers entiers et, à côté, la table des nombres de partages $P_{a+b} = 2^{a+b-1}$ correspondant aux résultats.

+	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2		4	5	6
3			6	7
4				8

$p_{(a+b)}$	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	2	4	8	16
(2)		8	16	32
(3)			32	64
(4)				128

par exemple, au nombre 5 = 2 + 3 correspond $P_5 = 2^4 = 16$ partages.
traduisons ces résultats en produits des partages concernés

* (commutative)	(1)	(2)	(4)	(8)
(1)	(1x1)x2	(1x2)x2	(1x4)x2	(1x8)x2
(2)		(2x2)x2	(2x4)x2	(2x8)x2
(4)			(4x4)x2	(4x8)x2
(8)				(8x8)x2

à chaque case de l'addition des entiers, a + b = c, lui correspond le double du produit des partages correspondants,

$a + b = c \longrightarrow 2P_aP_b = 2 \times 2^{a-1} \times 2^{b-1} = 2 \times 2^{a+b-2} = 2^{a+b-1} = 2^{c-1} = P_c$.

par exemple : à $3 + 5 = 8 \longrightarrow 2^{3+5-1} = 2^7 = 128 = P_8$.
à $2 + 4 = 6 \longrightarrow 2^5 = 32 = P_6$. etc.

cette correspondance permet de réécrire le tableau $P_{(a+b)}$ ci-dessus :

$p_{(a+b)}$	b = 1	b = 2	b = 3	b = 4
a = 1	P_2	P_3	P_4	P_5
a = 2		P_4	P_5	P_6
a = 3			P_6	P_7
a = 4				P_8

cette correspondance s'étend à toute addition de n termes puisqu'il est toujours possible de rassembler par paires les entiers consécutifs.

par exemple :
$2 + 2 + 11 = (2 + 2) + 11 = 4 + 11 = 15 \longrightarrow 2^{4+11-1} = 2^{14} = P_{15}$; et, transitivement aussi $2 + (2 + 11) = 2 + 13 \longrightarrow 2^{2+13-1} = 2^{14}$ et donc aussi $2^{2+2+11-1}$. ce qui se généralise aisément :

à $a + b + c +\ldots + n = s \longrightarrow 2^{a+b+c\ldots+n-1} = P_s = 2^{s-1}$.

les termes a, b, c etc. étant quelconques.

la correspondance est associative, commutative, etc.

on peut donc énoncer : à l'addition, de n'importe quelle manière, de n entiers quelconques correspond le nombre des partages du résultat. cette correspondance est surjective puisque elle reste vraie pour tous les partages d'un entier n.

en particulier, pour la somme de gauss nous obtenons :

à $g = \sum n = 1 + 2 +\ldots + n = n(n+1)/2$ correspond $2^{\{n(n+1)/2\}-1} = ½\sqrt{2^{n(n+1)}} = P_{\sum n} = 2^{(\sum n)-1} = ½(2^{\sum n}) = ½P_{\sum(n+1)}$ ou $P_{g+1} = P_{\sum(n+1)} = 2^{(\sum n)} = 2^g$.

a-4 – <u>remarque</u>.

l'exposant de $P_{\sum n}$ est $(n(n+1)/2) - 1 = (n^2 + n - 2)/2 = (n - 1)(n + 2)/2$ qui admet la récurrence $f(n+1) = n + f(n)$ avec $f(0) = -1$; d'où la suite

0	1	2	3	4	5	6	7	etc
-1	-1	0	2	5	9	14	20…etc	

par exemple, $f(6) = 5 + f(5) = 5 + 9 = 14$.

cette suite est donnée sous la forme inverse A080956 sur oeis[2] avec l'identité (n+1)x(2-n)/2.

B – considérations modulaires nœudiennes.

b-1) le découplage.

g_n est la suite des nombres triangulaires, cas particuliers des nombres polygonaux, tels que $g_n = n(n+1)/2$. (suite A000217 de l'oeis).

en voici les 20 premiers termes :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210

conformément à la réflexion d'eugène ehrhart sur la surprise d'euler qu'une suite d'entiers (les dits "nombres d'euler") prenne ses valeurs dans deux suites différentes, c'est ce qu'il advient à la somme arithmétique de gauss.

réécrivons cette suite en deux harmoniques principales, la suite modulaire $u = \{1, 4, 7\}$ dont nous n'utilisons que l'élément $u_1 = 1$ et la suite modulaire $z = \{0, 3, 6\}$. c'est-à-dire que les éléments de g_n sont séparés en deux suites, selon que leur valeur modulaire est u_1 ou $\in z$.

g_n se découple en $(u_1 z)^\infty$.

suite u_1 :1 10 28 55 91 136 190
suite z : 3 6 15 21 36 45 66 78 105 120 153 171 210

à la liste A001318 de l'oeis, on peut lire :

```
"Conway's relation twixt the triangular and pentagonal num-
 bers: Divide the triangular numbers by 3 (when you can ex-
 actly):
0 1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 66 78 91 105 120 136 153 …
0 - 1 2 .- .5 .7 .- 12 15 .- 22 26 .- .35 .40 .- ..51 …
....-.-.....+..+.....-..-.....+..+......-...-......+....
"and you get the pentagonal numbers in pairs, one of posi-
 tive rank and the other negative.
"Append signs according as the pair have the same (+) or op-
 posite (-) parity.
```

[2] oeis est le sigle du site internet "l'encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers".

"Then Euler's pentagonal number theorem is easy to remember:
"p(n-0)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)-p(n-12)-p(n-15)++-- =0^n
where p(n) is the partition function, the left side terminates before the argument becomes negative and 0^n = 1 if n = 0 and = 0 if n > 0.
"E.g. p(0)=1, p(7)=p(7-1)+p(7-2)-p(7-5)-p(7-7)+0^7=11+7-2-1+0=15."

b-2) – observons la progression de la suite $u_{1,i}$:

$u_{1,1} = 1 = 1 + 0 = 1 + 9 \times 0$
$u_{1,2} = 10 = 1 + 9 = 1 + 9 \times 1$
$u_{1,3} = 28 = 1 + 27 = 1 + 9 \times 3$
$u_{1,4} = 55 = 1 + 54 = 1 + 9 \times 6$
$u_{1,5} = 91 = 1 + 90 = 1 + 9 \times 10$
$u_{1,6} = 136 = 1 + 135 = 1 + 9 \times 15$
$u_{1,7} = 190 = 1 + 189 = 1 + 9 \times 21$ etc…

alors, soit $u_{1,i}$ le i-ème élément; et soit n_k le k-ième élément de la suite générale g_n, la suite de gauss est composée des deux suites intriquées l'une dans l'autre telles que nous avons

$$u_{1,i} = 1 + 9n_{k=i-1}, \text{ avec } n_k = 0 \text{ si } k = 0, \text{ et } i = 1 \text{ à } \infty$$

qui est la formule (découplée) des nombres ennéagonaux (dans laquelle les u et les n sont indifférenciés).

par exemple $u_{1,6} = 1 + 9 \times n_5 = 1 + 9 \times 15 = 136$.

la différence entre deux éléments consécutifs de la suite $u_{1,i}$ est

$$u_{1,i+1} - u_{1,i} = 9(n_i - n_{i-1}).$$

par ex. $u_{1,5} - u_{1,4} = 91 - 55 = 9(10 - 6) = 36$.
des équations précédentes nous tirons la relation

$$u_{1,i} - 9(n_i - i) - 1 = 0.$$

par exemple $u_{1,6} - 9(n_6 - 6) - 1 = 136 - 9(21 - 6) - 1$, etc.

cette équation correspond au rapport invariant $(u_{1,i} - 1)/(n_i - i) = 9$.

par ex. $(u_{1,6} - 1)/(n_6 - 6) = (136 - 1)/(21 - 6) = 135/15$, etc mais aussi, en utilisant l'itération sur i on peut écrire :

$$(u_{1,i+1} - u_{1,i})/(n_i - n_{i-1}) = 9.$$

par ex. $(u_{1,7} - u_{1,6})/(n_6 - n_5) = (190 - 136)/(21 - 15) = 54/6$, etc.

b-3) <u>les carrés impairs.</u>

revenons à l'équation $u_{1,i} = 1 + 9n_{i-1}$ et observons les différences entre éléments des paires $\{u_{1,i}, n_{i-1}\}$, $\Delta = u_{1,i} - n_{i-1}$:

$\{u_{1,i}, n_{i-1}\}$	{1, 0}	{10, 1}	{28, 3}	{55, 6}	{91, 10}	{136, 15}	{190, 21}
$\Delta = k^2$	1	9	25	49	81	121	169
k = u-ème + n-ème	1	3	5	7	9	11	13
$(u_{\text{-ème}}, n_{\text{-ème}}$	{1, 0}	{2, 1}	{3, 2}	{4, 3}	{5, 4}	{6, 5}	{7,6}

à chaque paire $\{u_{1,i}, n_{i-1}\}$ lui correspond sa paire des rangs respectifs des éléments, $\{i, i - 1\}$; la somme de ces rangs, $k = 2i - 1$, fournit l'entier k, dont la différence $\Delta = u_{1,i} - n_{i-1} = (2i - 1)^2 = k^2$.

C – <u>l'intrication.</u>

c-1) – la progression de la suite $u_{1,i}$ = (1,10,28,55,91,136,190,…) observée précédemment est la suiteA060544 de l'oeis, et la suite z = (3,6,15,21,36,45…) est la suite A117748 des nombres triangulaires divisibles par 3.

on peut donc écrire (l'opérateur d'intrication "₪" se lit "shekel") : A000217 = A060544 ₪ A117748. la suite A117748 elle-même susceptible de découplage.

en voici les 15 premiers termes divisés par 3 et réécrits modulo nos trois classes $u_i = \{1,4,7\}$, $d_i = \{2,5,8\}$ et $z_i = \{0,3,6\}$.

suite	z :	3	6	15	21	36	45	66	78	//	105	120	153	171	210	231	276
"	u	1			7			4		//		4			7		
"	d		2	5					8	//	8					5	2
"	z					3	6			//			6	3			

on peut donc réécrire :

A000217 = A060544 ₪ A117748 = A060544 ₪ [(udd)(uzz)], etc.

la somme de gauss possède donc (entre autres) des propriétés fractales périodiques que cette manière fait apparaître.

c-2) – mais continuons nos dérivations sur le même thème. en ayant divisé la ligne 2 de conway, on a fait apparaître 3 autres lignes u, d et z. ces trois lignes font surgir des symétries et translations incluses dans la structure de g_n.
une première approche est indiquée par les // dans la première monstration ci-dessus du découplage.
allons plus loin en décomposant la procédure :

les 13 premiers termes donnent, avec nos conventions :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
g_n	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91
u			1				7					4		
d				2		5							8	
z	0								3	6				

l’image graphique en est – les nombres consécutifs des suites étant représentés par des colonnes d'échelons verticaux :

```
               |
           |   |
           | | |
          ||  | |
          ||  |||
          ||||||
         |||||||
  0 ||||||||

  012 5736 48
```

cette suite {0,1,2,5,7,3,6,4,8} représente les neufs premiers termes de la A140263 de l'oeis "permutations of nonnegative integers obtained by interleaving A117967 and A117968".

cette première césure donne la séquence C. de 14 à 26 nous avons la séquence inverse C^{-}. et, de nouveau, à partir de 27 jusqu’à 53, la suite CC^{-} se reproduit à l’identique. en voici l’illustration graphique.

```
            ||                  ||
        |   ||   |          |   ||   |
        | | || | |          | | || | |
       || | || | ||        || | || | ||
       || |||||| ||        || |||||| ||
       ||||||||||||        ||||||||||||
      ||||||||||||||      ||||||||||||||
    0 |||||||||||||||| 0 0 |||||||||||||||| 0
```

012 573 648 846 3752 10 0 etc.

ce graphique est isomorphe modulo 9 à la suite complète A140263.

D – <u>réinterprétation modulaire de g_n.</u>

comme remarqué plus haut, la suite naturelle des entiers s'écrit comme une suite modulo 9 de briques (udz). appliquons cette réflexion sur la formule $\Sigma n = n(n+1)/2$. nous obtenons ainsi une série infinie $u_i d_i z_i$ constituée des entiers consécutifs, telle que

$u_i \in u = \{1,4,7,10,13, \text{etc.}\}$, $d_i \in d = \{2,5,8,11,14,17, \text{etc}\}$ et $z_i \in z = \{3,6,9,12,15,18, \text{etc.}\}$:

$u_i(u_i+1)/2 \quad d_i(d_i+1)/2 \quad z_i(z_i+1)/2 \quad u_{i+1}(u_{i+1}+1)/2$, etc, soit explicitement :

$u_1(u_1+1)/2 = (1.2)/2 = 1$ $d_1(d_1+1)/2 = (2.3)/2 = 3$ $z_1(z_1+1)/2 = (3.4)/2 = 6$
$u_2(u_2+1)/2 = (4.5)/2 = 10$ $d_2(d_2+1)/2 = (5.6)/2 = 15$ $z_2(z_2+1)/2 = (6.7)/2 = 21$
$u_3(u_3+1)/2 = (7.8)/2 = 28$ $d_3(d_3+1)/2 = (8.9)/2 = 36$ $z_3(z_3+1)/2 = (9.10)/2 = 45$
$u_4(u_4+1)/2 = (10.11)/2 = 55$ $d_4(d_4+1)/2 = (11.12)/2 = 66$ $z_4(z_4+1)/2 = (12.13)/2 = 78$

j'écris circulairement : $d_i = u_i + 1$, $z_i = d_i + 1$ et $u_{i+1} = z_i + 1$, avec les relations "géométriques" suivantes :

$$u_i x d_i/2 = u_j,\ d_i x z_i/2 = d_j \text{ et } z_i x u_{i+1}/2 = z_j.$$

<u>annexe de la 1ère partie.</u>: suites de l'oeis :

A000217; A001318; A060544; A080956;
A117748; A117967; A117968; A140263.